Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XII-a

Problema 1. Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie descrescătoare, astfel încât $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < 1$, oricare ar fi $x \geq 0$. Să se arate că:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ există şi este finită;
b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Problema 2. Fie A un inel comutativ cu n elemente, $n \geq 2$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$;
b) numărul funcţiilor polinomiale $\tilde{f} : A \to A$ este n^2.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că:
a) există un punct $a \in (0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = 0$;
b) există un punct $b \in (0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^b xf(x)\mathrm{d}x = bf(b)$.

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente şi $n \geq q$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un polinom din mulţimea polinoamelor de grad n din $K[X]$, acesta să nu aibă nicio rădăcină în K.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.